EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

V — 1 FEBRUARI 1969

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IN MEMORIAM COR ALDERS

Op 5 januari is Cor Alders plotseling overleden. De wiskundeleraren in Nederland hebben daardoor een van hun prominente figuren verloren. Ten bate van het onderwijs heeft hij een enorme hoeveelheid werk verzet. Vijftien jaar lang was hij bestuurslid van Wimecos en als zodanig heeft hij een zeer werkzaam aandeel gehad aan de herziening van het programma in 1958 en aan het tot stand komen van de „250 opgaven". Daarnaast was hij lid van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en had hij deel aan de werkzaamheden van het Katholiek Paedagogisch Bureau. Zijn wiskundeboeken waren de meest gebruikte in Nederland.

Wat hij deed, deed hij serieus en degelijk. Desondanks had zijn werk steeds een luchtige ondertoon. En dat maakte het zo aantrekkelijk met hem samen te mogen werken. Hij schiep zich geen problemen, die dieper lagen dan noodzakelijk was. Hij had een uitermate praktische inslag. In korte trekken wist hij door te dringen tot het praktisch essentiële zonder zich te verliezen in theoretische bespiegelingen.

En zo zijn werk was, was ook zijn persoon. Hij had oog voor de ernst van het leven en was plichtsgetrouw, zonder echter ooit deze goede eigenschappen te overdrijven. Hij was daardoor zijn gezelschap waard. Hij was een goed vriend, een gastvrij man, hij had een heerlijk gevoel voor humor. Zowel aan de mens Alders als aan de didacticus zullen velen met dankbaarheid blijven denken.

P. G. J. Vredenduin

GELIJKWAARDIG $\Leftrightarrow$ EKWIVALENT?

door

Drs. L. van den Brom
Amsterdam

Der positive Satz muß die Existenz des negativen Satzes voraussetzen und umgekehrt.
Ludwig Wittgenstein.

In het najaar 1967 kwamen mij kort na elkaar enige gelijkwaardigheden onder ogen, die alle gemeen hadden dat het ene lid zinvol was voor alle waarden van de veranderlijken, terwijl het andere lid voor zekere waarden van die veranderlijken zinloos werd. Bij die gelijkwaardigheden werden geen beperkingen gesteld, om het zinloos zijn van de optredende uitdrukkingen uit te sluiten. Zelfs kwam het voor dat men zo'n beperking overbodig vond.

Dit soort gelijkwaardigheden trof ik aan in de 43e jaargang van Euclides:

blz. 17 $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow (a = b^2 \wedge b \geqq 0)$ (1)

blz. 18 $(\sqrt{a} = b) \Leftrightarrow (a = b^2 \wedge b \geqq 0) \Leftrightarrow a = b^2 \wedge a \geqq 0 \wedge b \geqq 0)$

blz. 79 $\dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$ (2)

$\dfrac{a}{b} \geqq 0 \Leftrightarrow ab \geqq 0 \wedge b \neq 0$ (3),

in „Didactische Oriëntatie voor wiskundeleraren" II:

blz. 271 $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 \wedge B \geqq 0$ (1a)

blz. 273 $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow (A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0)$ (4a)

en in het Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde:

blz. 35 $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$ [1]) (4)

---

[1]) Men kan de syntaxis zodanig definiëren dat de haakjes in de geciteerde uitspraken overbodig zijn.

De hier geciteerde vermeende gelijkwaardigheden werden genoemd in verband met het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden. Zij werden bedoeld als regels voor het oplossen, waarbij men voor a en b uitdrukkingen in een reële veranderlijke mocht substitueren.

Laten wij ons eenvoudigheidshalve beperken tot het universum der reële getallen voor de veranderlijken a en b. Daarmee voorkomen we dan, dat in bepaalde gevallen nog een voorwaarde gesteld moet worden om a en b zinvol te houden.

Dat de uitdrukkingen, die hierboven staan verbonden door het $\Leftrightarrow$-teken, niet gelijkwaardig zijn in de gebruikelijke zin, blijkt duidelijk als we op de ontkenning van beide leden overgaan. Bijvoorbeeld (4) levert dan:

$$\overline{\frac{a}{b} = 0} \Leftrightarrow \overline{a = 0 \wedge b \neq 0}$$

$$\frac{a}{b} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \vee b = 0 \qquad (\overline{4})$$

Het rechterlid van $(\overline{4})$ is waar voor $b = 0$, onverschillig welk reëel getal we voor a substitueren; het linkerlid is zinloos voor $b = 0$.

Het was beter geweest de regels in de volgende gedaante te brengen, met behulp van quantoren waaraan we het definitie-gebied van de optredende uitdrukkingen verbinden:

$$\underset{a \geqq 0}{\forall} \; \underset{b}{\forall} \; (\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \wedge b \geqq 0) \qquad (1^*)$$

$$\underset{a}{\forall} \; \underset{b \neq 0}{\forall} \left(\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0\right) \qquad (2^*)$$

$$\underset{a}{\forall} \; \underset{b \neq 0}{\forall} \left(\frac{a}{b} \geqq 0 \Leftrightarrow ab \geqq 0\right) \qquad (3^*)$$

$$\underset{a}{\forall} \; \underset{b \neq 0}{\forall} \left(\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0\right) \qquad (4^*)$$

Daar ik persoonlijk geen voorstander ben van het invoeren van formele logica en logische symbolen op de middelbare school, zou ik graag de regels daar minder cryptisch brengen.
Bijvoorbeeld:

Onder de voorwaarde $a \geqq 0$, *is* $\sqrt{a} = b$ *gelijkwaardig met* $a = b^2$ *en* $b \geqq 0$.

Of bijvoorbeeld:

$\frac{a}{b} = 0$ *is gelijkwaardig met* $a = 0$, *mits* $b \neq 0$.

Reeds nu komt men eindexamenwerk tegen dat doorspekt is met implicatie-pijlen. Als men die implicatie-pijlen gaat vervangen door hun betekenis: *Als* ..., *dan* ..., dan ontstaat vaak onzin. Ik vrees dat de onbekwaamheid om oplossingen van wiskundevraagstukken in goed Nederlands te formuleren nog zal toenemen, als naast het pijltje nog andere logische symbolen geïntroduceerd worden. Het lijkt mij dan niet denkbeeldig dat één of andere interessantig-doende jongeman een opstel Nederlands inlevert geschreven in die geheimtaal.

Het goed leren formuleren van een oplossing in het Nederlands, waarbij als symbolen slechts de wiskundige gebruikt worden, lijkt mij voor iedere leerling nuttig. Ook als hij geen wiskunde gaat studeren. Hiermee wil ik dan in geen geval beweren dat formalisatie geen nut heeft. Formalisatie is een prachtig hulpmiddel om ongeformuleerde aannamen in een theorie op te sporen. De middelbare scholier is zeker niet zover, dat hij die beker tot de laatste teug kan legen. Formalisatie kan men niet met halfwerk afdoen!

De leerlingen zullen eerst in *klare taal* hun logisch denken dienen te ontwikkelen. Ik ben zelfs van mening dat het natuurlijke denken gefrustreerd raakt, indien de formele logica te vroeg geïntroduceerd wordt.

Laten we nu eens proberen een rechtvaardiging te vinden voor de regels (1), (2), (3), (1a), (4a) en (4).

In de artikelen in Euclides, waarin (1), (2) en (3) voorkomen vinden we geen aanknopingspunten. Nergens wordt daarin vermeld of met een afwijkende logica gewerkt wordt. Als $\sqrt{a}$ wordt opgeschreven, dient men zich te beperken tot $a \geqq 0$, wannneer gewerkt wordt in het universum der reële getallen. De als overbodig genoemde voorwaarde is zeer essentieel. Eveneens dient bij a/b gesteld te worden $b \neq 0$, wat ook nog mag volgen. Ook als later op andere gronden mocht blijken, dat we het definitie-gebied, $b \neq 0$, toch niet kunnen verlaten.

De didactische aanbevelingen gedaan in de artikelen in Euclides (43), blz. 17 en 79, kan ik dan ook weinig waarderen.

In ,,Didactische Oriëntatie'' wordt impliciet gesteld wat in verband met het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden, verstaan moet worden onder gelijkwaardig. In deel II kunnen we op blz. 273 lezen: ,,We hebben:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow (A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0),$$

d.w.z. de oplossingsverzameling van deze gebroken vergelijking is de doorsnede van de oplossingsverzameling van $A(x) = 0$ en de complementaire verzameling van $B(x) = 0$.

Voor de vereenvoudiging van breuken in een gebroken vergelijking geldt de volgende eigenschap:

$$\frac{(x-a)\,A(x)}{(x-a)\,B(x)} + C(x) = 0 \text{ en } \frac{A(x)}{B(x)} + C(x) = 0$$

zijn dan en dan alleen equivalent als

$$\frac{A(a)}{B(a)} + C(a) \neq 0.\text{''}$$

De geciteerde passage is bestemd voor wiskundeleraren. Voor de leerlingen lijkt mij de volgende versie duidelijker: „We hebben:

Onder de voorwaarde $B(x) \neq 0$, is $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ gelijkwaardig met $A(x) = 0$.

Voor de vereenvoudiging van breuken in een gebroken vergelijking geldt de volgende eigenschap:

Onder de voorwaarde $(x-a)\,B(x) \neq 0$, is $\frac{(x-a)\,A(x)}{(x-a)\,B(x)} + C(x) = 0$ gelijkwaardig met $\frac{A(x)}{B(x)} + C(x) = 0$."

Uit het citaat blijkt dan dat de gelijkwaardigheid moet worden opgevat als het gelijk zijn van de verzamelingen, die door de leden beschreven worden. Met die opvatting zijn (1), (2), (3), (1a), (4a) en (4) dan gelijkwaardigheden.

Echter laten we nu nog eens (4) onder de loep nemen. $a/b = 0$ en $a = 0 \wedge b \neq 0$ beschrijven in R^2 dezelfde verzameling (a en b zijn reële getallen). Echter ergens in het complement t.o.v. R^2 wordt $a/b = 0$ zinloos, n.l. voor $b = 0$. Dat heeft dan tot gevolg dat de ontkenningen van de uitdrukkingen $a/b = 0$ en $a = 0 \wedge b \neq 0$ niet dezelfde verzamelingen beschrijven. $a/b \neq 0$ bevat $b = 0$ niet; $a \neq 0 \vee b = 0$ bevat $b = 0$ wel.

In de logica die ik wens te hanteren, in de wiskunde, moet gelden, zoals gebruikelijk: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B})$

We moeten, om niet van het gebruikelijke af te wijken, ons beperken tot het definitie-gebied van de optredende uitdrukkingen. Het definitie-gebied van een uitspraak is die deelverzameling van het universum, waarop de in de uitspraak voorkomende uitdrukkingen zinvol gedefinieerd zijn. Als dan de complement-vorming t.o.v. het definitie-gebied plaatsvindt corresponderen de ontkenningen met de complementen.

Hoe de onderhavige regels dan moeten luiden is boven reeds aangegeven.

De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde kan nog alle kanten uit met de uitspraak (4), want zij beveelt op bladzijde 35 van

het Interimrapport o.a. ook aan: gelijkheid van verzamelingen en ekwivalentie van uitspraken; ekwivalente vergelijkingen.

On pardonne aisément un tort que l'on partage.

Bij het opstellen van dit artikel werd in de vorige versie, alhoewel ik de voorkeur gaf aan (1*) etc., ook als mogelijke oplossing gegeven:

$$a \geqq 0 \Rightarrow (\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \wedge b \geqq 0).$$

Vredenduin attendeerde mij erop, dat die uitspraak in feite ook behept was met de gewraakte fout. Mijn bedoeling was om het definitie-gebied van de uitspraak $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \wedge b \geqq 0$ vooraf te stellen middels $a \geqq 0$. Zulks mislukt echter door gebruik te maken van een *als . . ., dan . . .*-clausule. Immers voor $a < 0$ is het ondersteld $a \geqq 0$ onwaar, het gestelde $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \wedge b \geqq 0$ zinloos. En we zitten in hetzelfde schuitje.

Ten duidelijkste blijkt hier dat het definitie-gebied van een uitspraak niet in de uitspraak zelf is aan te geven. Het definitie-gebied moet buiten de uitspraak gesteld worden, liefst ervoor.

Het definitie-gebied moet expliciet gesteld worden.

Ten stelligste moet ik hier dan ook waarschuwen voor een standpunt, dat neerkomt op het stilzwijgend veronderstellen, dat we door het opschrijven van een uitdrukking ons beperken tot het definitie-gebied van die uitdrukking. Mag zulks in een hoofdstuk, waarin het louter aankomt op het aanleren van zekere technieken, zoals het differentiëren en het bepalen van primitieve functies, weinig bezwaarlijk zijn, in zijn algemeenheid is een dergelijk standpunt hoogst verwerpelijk.

In dit kader past het zeker op te merken, dat de in het opstel *De Alverzameling* (Euclides (41), blz. 97 t.e.m. 103) gecreëerde moeilijkheden verdwijnen als sneeuw voor de zon, als bij iedere uitspraak het definitie-gebied opgegeven wordt en de logische operaties betrokken worden op dat definitie-gebied.

Als men de notatie $V = \{x \mid U(x)\}$ gebruikt om de verzameling beschreven door de uitdrukking $U(x)$ aan te geven, dan kan men voor de streep het definitie-gebied van $U(x)$ aangeven. Een voorbeeld: $V = \{x \in R, x \geqq 1 \mid \sqrt{x - 1} > 2\}$, als reeds is aangegeven welke de alverzameling is, in het voorbeeld de reële getallen, dan kan men volstaan met: $V = \{x \geqq 1 \mid \sqrt{x - 1} > 2\}$.
Een voorbeeld waarbij het definitie-gebied samenvalt met de alverzameling, het universum: $W = \{x \mid x > 7\}$.

Trouwens welke zin heeft de notatie als men voor de streep alleen de variabelen noemt (Euclides (43), blz. 2). Welke letters men als variabelen moet opvatten kan men ook wel langs andere weg vastleggen, men kan dan de streep en wat ervoor staat wel weglaten, eventueel ook de accoladen.

Zo men mij mocht vragen of de vermoeiende bezigheid om bij het vermelden van verzamelingen ook de alverzameling op te geven *nuttig* en *nodig* is, dan is het antwoord:

Het is *nodig* de alverzameling voor de optredende variabelen op te geven aan het begin van de te bespreken theorie, boven het hoofdstuk, eventueel aan het begin van het vraagstuk.

Het is *nodig* het definitie-gebied aan te geven bij iedere uitspraak.

Tevens is dan impliciet antwoord gegeven op de vraag naar het *nut*. Of zo men wil: die vraag kan men als wiskundige negeren.

Boven is door mij al aangegeven dat ik zeer sceptisch sta tegenover het introduceren van formele logica bij het v.o. Ik ben verder nog van mening, dat men zich bij het onderwerp verzamelingen ten zeerste dient te beperken en slechts datgene mag introduceren wat het *wiskunde*-onderwijs bij het v.o. beter hanteerbaar en begrijpbaar doet zijn.

Echter formele logica en verzamelingenleer kunnen voor de wiskundeleraar wel belangrijke hulpmiddelen zijn om het onderwijs dat hij geeft, critisch voor te bereiden. Ik hoop dat dit opstel tot het laatste bijdraagt.

Naschrift.

Als men $\forall_{b \neq 0} \{U(b)\}$ interpreteert als $\forall_{b}\{b \neq 0 \Rightarrow U(b)\}$, hetgeen sommige wiskundigen wel doen, dan levert het koppelen van $b \neq 0$ aan de quantor nog geen oplossing voor de moeilijkheden. Ik ben echter van mening dat we datgene wat we in de uitspraak kwijt kunnen, niet moeten koppelen aan de quantor. Om de uitspraak te bekorten moeten we de quantor niet gaan belasten met een taak waar deze niet voor bedoeld is. De quantor werkt *op* de uitspraak die volgt, de quantor dient niet *in* die uitspraak te werken. In het bovenstaande opstel zie ik de quantoren dan ook buiten de uitspraak staan waar ze op werken. Zo men de propositie met zijn quantoren samen als één uitspraak wenst op te vatten, dan is het een uitspraak met een gradatie.

Nog zij opgemerkt dat men kan concluderen, dat het zinvol is om in klare taal een onderscheiding te maken tussen:

Onder de voorwaarde A, geldt B en *Als A, dan B.*

KROMME IN DE TRAM

door

Ir. H. M. MULDER

Aruba

In oktober 1962 van Euclides trof u een artikel getiteld: krommen bij uitzetijzers. Het betrof de lijn die het eind van een uitzetijzer in de vensterbank kan krassen als het betreffende raam geopend wordt.

Dit keer onderzoeken we een kromme, die mijn aandacht trok op de vloer van de Haagse tram.

Deze werd daarin gekrast door een openschuivende deur. Normaal wordt een deur geopend door een scharnierbeweging. Als deze deur een breedte a heeft en om O scharniert dan bestrijkt deze een aanzienlijke ruimte (kwartcirkel OAB). Daarom wordt de deur op een andere manier geopend.

Het lijnstuk OA (lengte a) verplaatst zich zo dat het ene eind steeds over de x-as glijdt en het andere eind vanaf O over de y-as naar B (OB $= a$).

Eenzelfde deurbeweging wordt tegenwoordig vaak toegepast bij garagedeuren, waarbij de deur uit de vertikale stand naar de horizontale (langs het plafond) gaat. Ook daar is de bedoeling: ruimtebesparing. We willen wel eens bepalen: hoeveel?

Allereerst geven we de ,,deurpositie'' aan in parametervorm, aldus

$$\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{a\sin\varphi} = 1$$

of

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{1}$$

We bepalen vervolgens de omhullende van de lijnstukken met lengte a die hun eindpunten op de assen hebben. Hiertoe moeten wij uit

$$f(x, y, \varphi) = 0$$

en

$$\frac{\mathrm{d}f(x, y, \varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

φ elimineren.

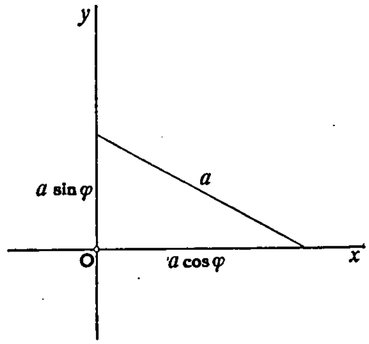


Fig. 1.

De tweede vergelijking wordt:

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \sin^2 \varphi - a \cos^2 \varphi = 0. \qquad (2)$$

We moeten nu φ elimineren uit vergelijking (1) en (2).

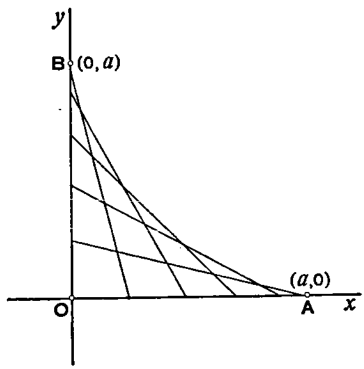


Fig. 2.

Daartoe schrijven we (1) aldus:

$$x \operatorname{tg} \varphi + y - a \sin \varphi = 0$$

en (2) aldus

$$x \operatorname{cotg} \varphi - y + a \sin \varphi - a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = 0$$

optelling levert

$$x (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi) = a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

ofwel

$$x\left(\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\right) = a\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$

ofwel

$$\cos^3\varphi = \frac{x}{a}$$

nu schrijven we (1) aldus:

$$x - y\,\mathrm{tg}\,\varphi + a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} - a\cos\varphi = 0$$

en (2) aldus

$$x + y\,\mathrm{cotg}\,\varphi - a\cos\varphi = 0$$

aftrekking levert

$$y\,(\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{cotg}\,\varphi) = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

of

$$y\left(\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\right) = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

of

$$\sin^3\varphi = \frac{y}{a},$$

dus

$$\frac{x}{a} = \cos^3\varphi \qquad \text{en} \qquad \frac{y}{a} = \sin^3\varphi$$

ofwel

$$\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{x}{a}} \qquad \text{en} \qquad \sin\varphi = \sqrt[3]{\frac{y}{a}},$$

zodat de vergelijking van de omhullende wordt

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{a}\right)^2} = 1$$

ofwel

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Er zijn direkt 3 punten te noemen, die hierop moeten liggen, te weten

$$(0, a) \quad \text{en} \quad (a, 0) \quad \text{en} \quad (\tfrac{1}{4}a\sqrt{2}, \tfrac{1}{4}a\sqrt{2})$$

Dit klopt.

Verder heeft de kromme 4 symmetrieassen, te weten de x-as, de y-as, de bissectrices der kwadranten. De x- en y-waarden kunnen in absolute waarde niet groter worden dan a.

De raaklijnrichting in de uiterste punten blijkt horizontaal of vertikaal te zijn.

Dit volgt aldus:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{2}} \,.\, -\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

stel $\quad x = a \quad$ dan $\quad \dfrac{dy}{dx} = 0$ (helling $= 0$).

Welke baan beschrijft elk punt van het lijnstuk tijdens de beweging?

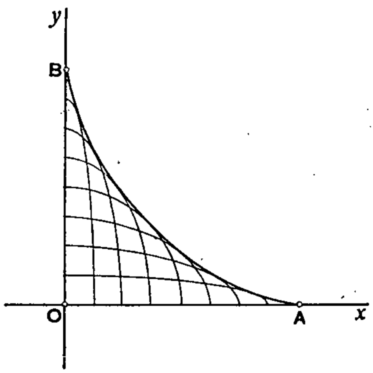


Fig. 3.

Stel het lijnstuk in stand φ en P willekeurig erop, zodat

$$\text{PR} = p \text{ en PQ} = (a - p), \text{ dan } x = (a - p)\cos\varphi$$

en

$$y = p \sin\varphi$$

zodat

$$(a - p)^2 y^2 + p^2 x^2 = p^2 (a - p)^2$$

dit zijn ellipsen met de x- en y-assen als assen en halve aslengten p en $(a - p)$.

Het punt midden op het lijnstuk beschrijft een cirkel met straal $\frac{1}{2}a$

$$x^2 + y^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2.$$

Tenslotte willen we bepalen hoeveel ruimtewinst we door deze nieuwe deurverplaatsing bereikt hebben.

Daartoe moeten we de oppervlakte van de kwart cirkel OAB vergelijken met de oppervlakte van het stuk tussen assen en omhullende.

Dit laatste wordt:

$$\int_0^a y\,\mathrm{d}x = \int_0^a a \sin^3 \varphi\,\mathrm{d}x = \int_0^{-\pi/2} a \sin^3 \varphi \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{-\pi/2} a \sin^3 \varphi \,.\, (-\,3a \cos^2 \varphi \sin \varphi)\mathrm{d}\varphi =$$

$$-3a^2 \int_0^{-\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi\,\mathrm{d}\varphi;$$

deze integraal is uit te rekenen met behulp van reduktieformules en geeft als uitkomst:

$$-\,3a^2\Big[-\tfrac{1}{6} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi - \tfrac{1}{8} \sin \varphi \cos^3 \varphi + \tfrac{1}{16} \sin \varphi \cos \varphi + \tfrac{1}{16}\varphi\Big]\Big|_0^{-\frac{1}{2}\pi}$$

ofwel

$$-\,3a^2 \left(\frac{1}{16}\right)\left(-\,\frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{3}{32}\, a^2\pi.$$

De oppervlakte van de cirkelsektor is $\frac{1}{4}\, a^2\pi = \frac{8}{32}\, a^2\pi$ zodat de eerstgenoemde oppervlakte

$\frac{3}{8}$ deel van de kwart cirkel is en er dus

$\frac{5}{8}$ deel ofwel $62\frac{1}{2}$ % ruimtebesparing ontstaat.

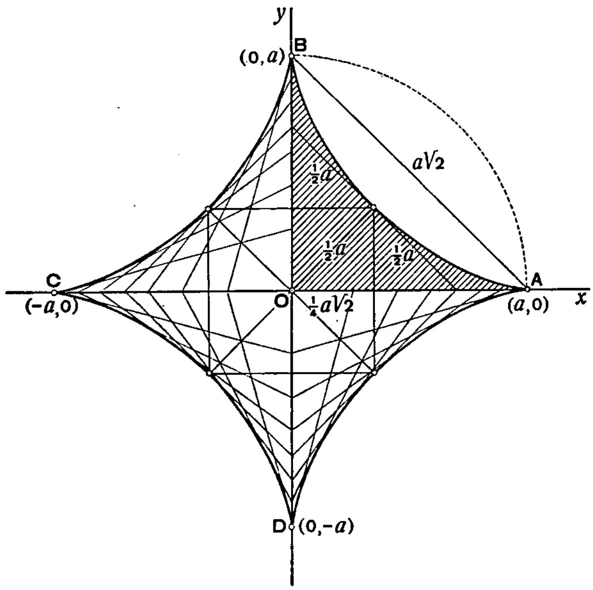


Fig. 4.

Soms wordt er nog meer ruimte bespaard door een dergelijke deur nog weer in twee delen, die ten opzichte van elkaar scharnierend zijn, te laten schuiven. De twee delen maken dan na elkaar en achter elkaar een identieke beweging.

In dit geval wordt de beschreven oppervlakte $\frac{3}{32}\pi\,(\frac{1}{2}a^2) = \frac{3}{128}\pi a^2$ ten opzichte van de kwart cirkel wordt dit nu $\frac{3}{32}$ deel of 9,4 % zodat de ruimtebesparing nu 90,6 % wordt.

We willen nu nog onderzoeken, hoe bij een dergelijke deurbeweging de snelheden langs x- en y-as samenhangen.

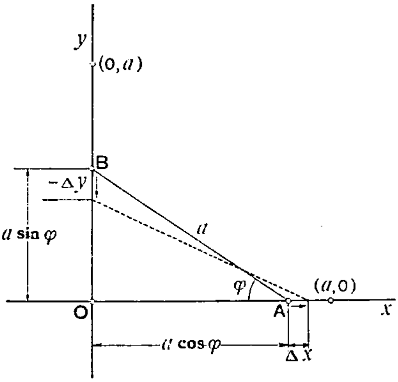


Fig. 5.

Laten we eens veronderstellen dat een elektromotor het punt A eenparig langs de x-as van O naar rechts voert, met snelheid v. Hoe is dan y een funktie van de tijd en hoe is de snelheid van het betreffende punt op de y-as een funktie van de tijd. We stellen dat op moment $t = 0$ de deur in de vertikale stand staat, verder dat de totale beweging een tijdsduur T heeft.

Dan geldt $a = vT$ en $dx = v \,.\, dt$

zodat

$$a^2 = (a \sin\varphi + \Delta y)^2 + (a\cos\varphi + \Delta x)^2$$

dus

$$-\,dx \,.\, \cos\varphi = dy \,.\, \sin\varphi$$

of

$$\frac{dx}{dy} = -\,\mathrm{tg}\,\varphi = -\,\frac{y}{x}$$

of

$$\frac{v \,.\, dt}{dy} = \frac{-\,y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

dus

$$t = \int \frac{-y}{v\sqrt{a^2 - y^2}} dy$$

waaruit volgt

$$t = \frac{1}{v} \sqrt{a^2 - y^2}$$

zodat

$$t^2v^2 = a^2 - y^2$$

en

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{t^2}{T^2} = 1}$$

Het deel dat wij hiervan nodig hebben is een kwart ellips.

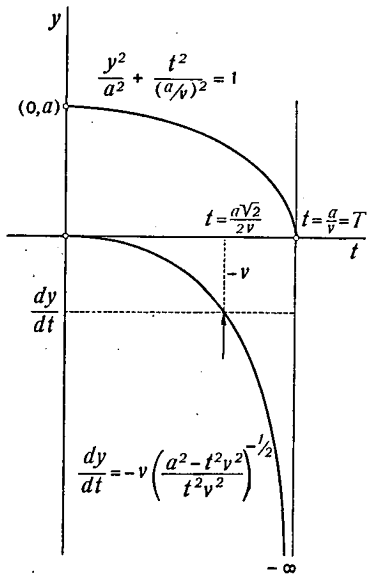


Fig. 6.

De afgeleide funktie hiervan geeft ons de snelheid waarmee punt B nu omlaagschuift.
Hierboven stond reeds

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v \,.\, \sqrt{a^2 - y^2}}{-y} = \frac{-v \,.\, tv}{\sqrt{(a^2 - t^2v^2)}}$$

dus

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{-vt}{\sqrt{T^2 - t^2}}}$$

Uit de tekening blijkt dat, indien langs de x-as inderdaad eenparig wordt bewogen, langs de y-as zeer langzaam wordt gestart, maar bij nadering van het eindpunt een oneindig grote snelheid bereikt zou moeten worden. Het is dus raadzaam langs de x-as niet eenparig te bewegen, maar daar voor een snelle start te zorgen en op het eind de beweging zeer sterk af te remmen.

WIMECOS

MEDEDELING

Ter algemene vergadering van Wimecos op 23 december 1968 zijn de statuten en het huishoudelijke reglement van Wimecos gewijzigd.
De vereniging heet vanaf genoemde datum:

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Wimecos paste in de oude organisatie van het Nederlandse onderwijs; de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voegt zich naar de wet op het Voortgezet Onderwijs. De eerste zin van artikel 7 van de Statuten luidt:
Lid kunnen worden leraren in de wiskunde aan scholen, als bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs.
De algemene vergadering heeft het bestuur gemachtigd tot uitbreiding met twee leden uit het Mavo.
Tot het bestuur is inmiddels toegetreden de heer L. A. G. M. Muskens, leraar aan de R.K. Mavoschool in Schijndel.
Het bestuur zal koninklijke goedkeuring van de nieuwe statuten en het nieuwe huishoudelijke reglement aanvragen.
Direct nadat die goedkeuring is verkregen — of eerder — zullen de statuten en het huishoudelijke reglement in „Euclides" worden gepubliceerd.
Met de redactie van „Euclides" en met de WVO en Liwenagel zal worden overlegd, hoe ons gemeenschappelijke tijdschrift aan de nieuwe situatie kan worden aangepast.

Namens het bestuur
A. J. Th. Maassen, secretaris.

LIWENAGEL

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel en het abonnementsgeld voor de 44e jaargang nog niet betaalden, wordt vriendelijk verzocht dit nu binnenkort te doen door *f* 5,50 over te maken op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.

ε, δ EN DE REKENWIJZE VAN HORNER

door

M. G. BEUMER

T. H. Delft

1. „Klassieke" („exacte") analyse en „numerieke" analyse zijn twee elkaar aanvullende aspecten van dezelfde wetenschap. Wij zullen dat hier toelichten aan de hand van een voorbeeld dat ligt aan de basis van de analyse: de definitie van de limiet van een polynoom.

Het hier beschrevene is allerminst nieuw maar het schijnt weinig bekendheid te genieten. Het kan - zoals uit eigen ervaring gebleken is - met veel vrucht gebruikt worden zowel ter toelichting van de epsilontiek alsook ter toepassing van een eenvoudige numerieke methode: de Rekenwijze van Horner. Ook andere toepassingen worden aangeduid.

2. Men zegt dat $\lim_{x \to a} f(x) = l$ indien er bij een willekeurig gekozen (klein) getal $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ bestaat zodanig dat uit $0 < |x - a| < \delta$ volgt: $|f(x) - l| < \varepsilon$. Dit is een existentiedefinitie van l. Wil men de definitie constructief maken dan moet men een voorschrift vinden met behulp waarvan men uit de gekozen ε (de „tolerantie") een geschikte δ numeriek kan bepalen.

Het vinden van zo'n voorschrift is vaak een kwestie van geluk of van kunstgrepen; het gevolg hiervan is dat de techniek van het majoreren (want daar gaat het uiteindelijk om) in een slecht daglicht wordt geplaatst.

Indien echter $f(x)$ een polynoom is - hetgeen bij vele toepassingen het geval is - bestaat er een vaste methode die rechtstreeks naar het doel leidt.

Teneinde de leesbaarheid te verhogen geven we eerst een aantal voorbeelden (§ 3). Daarna komen de algemene formules (§ 4). Tenslotte maken we nog enige opmerkingen van andere aard (§ 5).

3. *Voorbeeld 1*: $\lim_{x \to 3} x^2 - 16 = -7$; ε is gekozen.
$f(x) - l = x^2 - 9$; we ontwikkelen $x^2 - 9$ naar machten van $x - 3$ met behulp van de Rekenwijze van Horner:

	1	0	− 9
3	0	3	9
	1	3	<u>0</u>
3	0	3	
	<u>1</u>	<u>6</u>	

$|f(x) - l| = |(x-3)^2 + 6(x-3)| \leqq |x-3|^2 + 6|x-3| < \varepsilon$,
dus: $|x-3|^2 + 6|x-3| + 9 < \varepsilon + 9$, dus:
$|x-3| + 3 < \sqrt{\varepsilon + 9}$, dus: $|x-3| < \sqrt{\varepsilon+9} - 3$.
Een geschikte δ is derhalve: $\delta = \sqrt{\varepsilon + 9} - 3$.

Voorbeeld 2: $\lim\limits_{x\to 2} 5x^2 = 20$; ε is gekozen.
We hebben nu te maken met $|5x^2 - 20| < \varepsilon$, ofwel $|x^2 - 4| < \frac{1}{4}\varepsilon$.
Op dezelfde wijze vinden we dan: $\delta = \sqrt{\frac{1}{5}\varepsilon + 4} - 2$.

Voorbeeld 3: $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 + 5x^2) = 6$; ε is gekozen.
Indien we $x^3 + 5x^2$ met de Rekenwijze van Horner ontwikkelen naar machten van $(x-1)$ dan vinden we:
$|x-1|^3 + 8|x-1|^2 + 13|x-1| < \varepsilon$, hetgeen zou leiden tot $\delta^3 + 8\delta^2 + 13\delta < \varepsilon$. Dit geeft moeilijkheden. Het is derhalve verstandiger in een geval als dit als volgt te werk te gaan:
$|x^3 + 5x^2 - 6| = |x^3 - 1 + 5x^2 - 5| \leqq |x^3 - 1| + 5|x^2 - 1|$.
$|x^3 - 1| < \frac{1}{2}\varepsilon$, met $0 < |x-1| < \delta_1$ levert op: $\delta_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\varepsilon + 1} - 1$
$5|x^2 - 1| < \frac{1}{2}\varepsilon$, met $0 < |x-1| < \delta_2$ levert op: $\delta_2 = \sqrt{\frac{1}{10}\varepsilon + 1} - 1$.
Deze beide berekeningen berusten weer op de toepassing van de Rekenwijze van Horner. Het eindresultaat wordt dan:
$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

4. Een algemeen polynoom kan (zie ook Voorbeeld 3) worden opgebouwd uit termen $a_n x^n$; de constanten a_n leveren geen enkele moeilijkheid op behalve bij de term van de hoogste graad (zie evenwel Voorbeeld 2).

Het geval $\lim\limits_{x\to a} x^n$, $a > 0$, kan op de in § 3 geschetste wijze worden behandeld; men vindt dan: $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon + a^n} - a$. Het is duidelijk dat steeds geldt: $\delta > 0$.

Ingeval $a < 0$, $\lim\limits_{x\to a} x^n$, kiest men $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon + |a|^n} - |a|$. Dit is een algemene formule die natuurlijk ook geldt voor $a > 0$. Voor een complexe waarde van a is de methode zonder wijziging bruikbaar (met behulp van de Rekenwijze van Horner, toegepast op het

complexe geval) mits $f(x) - l$ een polynoom is met reële coëfficiënten. Is aan de laatstgenoemde voorwaarde niet voldaan dan is de methode slechts bruikbaar indien $f(x) - l$ geschreven wordt als $\varphi(x) + \mathrm{i}.\ \psi(x)$, waarin φ en ψ polynomen zijn met reële coëfficiënten. Men kan nog opmerken dat (zie Voorbeeld 3) indien een ε in concreto gekozen is, een probleem als $\delta^3 + 8\delta^2 + 13\delta < \varepsilon$ direct leidt tot toepassingen als Regula Falsi en Newton-Raphson. *Indien men dat wenst kan dus, direct aansluitend aan de limiet-definitie, een tamelijk grote bron van numerieke toepassingen worden aangeboord.*

5. We komen nog even terug op Voorbeeld 3:
$| x - 1 |^3 + 8 | x - 1 |^2 + 13 | x - 1 | < \varepsilon$. Men kan ook zo te werk gaan:
Kies allereerst $\delta < 1$. Uit $0 < | x - 1 | < \delta$ volgt dan voor elk natuurlijk getal n: $| x - 1 |^n < \delta$. Indien $0 < | x - 1 | < \delta$, geldt: $| x - 1 |^3 + 8 | x - 1 |^2 + 13 | x - 1 | < \delta + 8\delta + 13\delta < 22\delta$. Aan alle voorwaarden zal dan voldaan zijn indien geldt: $\delta < 1$, $\delta < \varepsilon/22$.

Dit leidt tot de volgende algemene regel:
Stel $f(x) - l = \varphi(x)$ is een (reëel) polynoom van graad $n \geqq 1$. Ter bestudering van $\lim_{x \to a} f(x) = l$ (a is reëel) ontwikkelen we $f(x) - l = \varphi(x)$ als volgt in machten van $(x - a)$:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x - a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\varphi''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\varphi^n(a).$$

Stel $M = | \varphi(a) | + | \varphi'(a) | + \left| \frac{\varphi''(a)}{2!} \right| + \ldots + \left| \frac{\varphi^n(a)}{n!} \right|$.

Is ε reeds gekozen, dan voldoet de volgende δ:

$$\delta < 1,\ \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Men kan voorts nog opmerken dat de mogelijkheid bestaat hieraan een beschouwing over de grootte van de δ's vast te knopen. In Voorbeeld 3 vonden we: δ_1 en δ_2, hierboven vonden we: $\delta < 1$, $\delta < \varepsilon/22$. Door ontwikkeling in Binomiaalreeksen vinden we:

$$\delta_1 = \tfrac{1}{6}\varepsilon - \tfrac{1}{36}\varepsilon^2 + \tfrac{5}{648}\varepsilon^3 - \ldots$$

$$\delta_2 = \tfrac{1}{20}\varepsilon - \tfrac{1}{800}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{16000}\varepsilon^3 - \ldots$$

terwijl $\delta = \frac{1}{22}\varepsilon$ (dit alles met: $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$)

Dat geeft de mogelijkheid tot een nadere beschouwing over de

afknotfout in de alternerende reeksen, met daaraan gekoppeld het bepalen van δ uit: $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Concluderend stellen we vast dat de limiet-definitie uit de klassieke („exacte") analyse in elke cursus „Beginselen der Analyse" ruimschoots gelegenheid biedt tot het maken van uitstapjes in het gebied der „numerieke" analyse.

KORREL CXLVII

Definitie van een functie

Onder een relatie van V naar W verstaan we een verzameling geordende paren (x, y), waarvan $x \in V$ en $y \in W$.

Onder een *afbeelding* van V naar W verstaan we een relatie van V naar W met de eigenschap, dat elke $x \in V$ in precies één van de geordende paren, die tot de relatie behoren, voorkomt:

In Nederland aarzelt men t.a.v. de definitie van een functie tussen twee mogelijkheden:

A. Onder een functie van V naar W verstaat men hetzelfde als onder een afbeelding van V naar W.

B. Onder een functie van V naar W verstaat men een relatie van V naar W met de eigenschap, dat elke $x \in V$ in hoogstens één van de geordende paren, die tot de relatie behoren, voorkomt.

Als de voorstanders van opvatting A spreken over een functie van V naar W, bedoelen ze dus, dat de verzameling van originelen de gehele verzameling V is. De voorstanders van opvatting B laten daarentegen ook toe, dat de verzameling van de originelen een echt deel van de verzameling V is.

Voorbeeld. Beschouw de relatie van R naar R:

$$\{(x, y) | y = \sqrt{(x^2 - 4x + 3)}\}.$$

Voorstanders van opvatting A noemen dit een functie van

$$\{x | x \leqq 1 \vee x \geqq 3\} \cap \text{R naar R}.$$

Voorstanders van opvatting B hebben het gemakkelijker en kunnen spreken van een functie van R naar R.

Als leraar gaat onze voorkeur al snel uit naar opvatting B. De A-supporters moeten zelf de verzameling van originelen opstellen, voordat ze hun leerlingen aan het werk zetten. De B-supporters daarentegen kunnen hun leerlingen opdragen de verzameling van de originelen te vinden. Dat dit praktische onderscheid tussen beide

opvattingen wetenschappelijk van geen waarde is, is duidelijk. Het ligt dan ook voor de hand te zoeken naar een verschil tussen beide methoden, dat wetenschappelijk meer relevant is.

Voorbeeld. Los de differentiaalvergelijking

$$xy' = -y$$

op. De vraag is gesteld aan A-supporters.

Gevraagd wordt dus een functie

$$f : x \rightarrow y = f(x),$$

die aan deze vergelijking voldoet. Zoals bekend, impliceert het woord differentiaalvergelijking, dat we aan het werk zijn binnen de verzameling van de reële getallen. Met f is dus bedoeld een functie van R naar R.

We lossen de vergelijking op. Als oplossing vinden we de functies:

$$y = \frac{c}{x}$$

Al deze functies zijn functies van R/{0} naar R. Er is geen enkele functie van R naar R, die aan de vergelijking voldoet. De differentiaalvergelijking is vals.

Tenzij u de vraag anders stelt. Dat valt uiteraard altijd te proberen, maar het resultaat zal een gekunsteld en onhandig karakter dragen.

De B-supporters vragen domweg alle functies van R naar R te vinden, die voldoen en krijgen als antwoord:

$$y = \frac{c}{x}$$

D.w.z. alle functies van R naar R:

$$x \rightarrow \frac{c}{x} \quad (c \in \mathrm{R}).$$

Conclusie. *Het verdient aanbeveling onderscheid te maken tussen afbeeldingen en functies en de afbeeldingen als bijzonder geval van de functies te beschouwen.*

Oosterbeek P. G. J. Vredenduin

HERORIËNTERINGSCURSUS OVER COMPUTERWISKUNDE VAN 12-14 SEPTEMBER 1968 TE EINDHOVEN

door

G. J. VANNISSELROY

Bloemendaal

Deze heroriënteringscursus is de eerste cursus nieuwe stijl met ruim 120 deelnemers uit alle delen van het land.

De cursus wordt geopend met een inleiding door Prof. Dr. J. J. Seidel over het rapport betreffende de wenselijkheid en mogelijkheid tot het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor M.A.V.O., H.A.V.O. en V.W.O., uitgebracht aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde door een commissie bestaande uit Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Prof. Dr. M. Euwe, Prof. Dr. J. J. Seidel, Prof. Dr. A. van der Sluis en Prof. Dr. E. van Spiegel.

Vervolgens begint Prof. Dr. N. G. de Bruijn aan de eerste van een zestal uitermate boeiende voordrachten. Hierin geeft hij een uiteenzetting over eventueel bij het onderwijs te gebruiken oefenmateriaal op het gebied van blokprogramma's, alsmede over de verwerking hiervan door een eenvoudige computer.

Het rapport en de voordrachten blijken voldoende stof op te leveren voor een in vier afzonderlijke groepen te voeren discussie onder de bekwame leiding van de heren Morselt, Ligtmans, Kamps, Geurts en Bron, allen medewerkers van de T.H. Eindhoven.

De cursus wordt afgerond met een plenaire discussie onder leiding van Prof. Dr. J. J. Seidel, aan de hand van de door de vier groepen aan het slot van hun discussie geformuleerde stellingen. Aan deze discussie neemt ook Prof. Dr. N. G. de Bruijn deel. Hieronder volgt een verslag van deze plenaire discussie.

De stellingen zijn te rangschikken naar de volgende onderwerpen:

1. *de wenselijkheid om computerwiskunde in het middelbaar onderwijs in te voeren;*
2. *de inhoud van het vak computerwiskunde in het middelbaar onderwijs;*
3. *de plaats van de computerwiskunde in het middelbaar onderwijs;*
4. *de geschiktheid van de leraren en van de bestaande lerarenopleiding met betrekking tot de computerwiskunde.*

1. Men is vrijwel unaniem doordrongen van het feit, dat computerwiskunde in de middelbare school moet worden ingevoerd.

De maatschappelijke noodzaak om de jeugd in contact te brengen met deze materie is dermate dwingend, dat het niet wenselijk is het invoeren van dit vak al te zeer afhankelijk te stellen van de duur van experimenten. Hiermede wil echter niet ontkend worden, dat experimenteren noodzakelijk is.
Een prettige bijkomstigheid is nog, dat de schoolwiskunde door invoering van computerwiskunde uit zijn isolement gehaald kan worden.

2. Vrijwel iedereen is de mening toegedaan, dat de algoritmiek — in de vorm van blokschema's — het voornaamste aspect van de computerwiskunde in het onderwijs dient te zijn. Evenwel zal ten behoeve van de motivatie de leerling ook in contact gebracht moeten worden met de machine zelf. Als voorbeeld wordt gewezen op de situatie bij het voortgezet onderwijs in Ontario (Canada), waar de door kinderen gemaakte programma's door een aparte busdienst 's avonds worden opgehaald om deze de volgende morgen uitgewerkt weer te bezorgen.
Ten aanzien van de blokschema's wordt gesteld, dat naast wiskundige problemen ook een voldoend aantal voorbeelden uit andere gebieden aan bod dient te komen.

3. a. bij welk vak;
   Men is het er over eens geworden, dat dit nieuwe vak het meest aansluit bij de wiskunde, voor zover het de basisprincipes betreft.
   b. in welk leerjaar;
   Het is nog een probleem in welk leerjaar met deze stof begonnen moet worden. De meerderheid van de vergadering is is van mening, dat dit in de onderbouw dient te geschieden. Hier en daar oppert men zelfs de wenselijkheid een begin te maken in de brugklas, teneinde bij de leerlingen de ontwikkeling van de juiste begrippen — hierbij wordt b.v. gedacht aan de betekenis van het begrip variabele — te bevorderen. In de bovenbouw zal dan de computerwiskunde als apart vak op het programma dienen te staan, maar dan aangepast aan de door de leerling gekozen richting, d.w.z. voor wat betreft de B-richting als onderdeel van de wiskunde en voor wat betreft de A-richting geïntegreerd in het vak boekhouden.

4. Bij nader inzien is de mening van de vergadering verdeeld over de juistheid van de plaats van dit onderwerp in vorengenoemd rapport. Derhalve besluit men hierover geen uitspraak te doen. In dit kader is wel van belang de wens tot tijdige informatie, indien men tot invoering in het onderwijs besluit.

TOEGEPASTE WISKUNDE OP HET M.O.

door

Dr. Ir. E. R. PAERL

Amsterdam

In het mei-nummer 1968 van Euclides, stelt Prof. Dr. N. G. de Bruyn, dat naast de onderwerpen uit de zuivere wiskunde óók voor de toegepaste wiskunde voldoende plaats in het nieuwe programma ingeruimd moet worden. Ik citeer met instemming:

„Hoewel wij juist in een tijdperk zijn aangekomen waarin de wiskunde grote maatschappelijke betekenis heeft gekregen en getreden is buiten de traditionele toepassingsgebieden, vinden wij dat niet weerspiegeld in de voorgestelde programma's".

In het onderstaande artikel wil ik hier nader op in gaan en tevens een aantal suggesties opwerpen van onderwerpen uit de toegepaste wiskunde die mij geschikt lijken om op de middelbare school te behandelen.

Wat zijn de belangrijkste argumenten, die pleiten voor invoering van toegepaste wiskunde op de middelbare school?

1. Het eerste argument betreft de maatschappelijke betekenis van de wiskunde heden ten dage en spreekt haast vanzelf. Men hoeft hier slechts te wijzen op het brede gebied van toepassingen om daarmee tevens te wijzen op het feit dat de wiskunde mede een integrerend deel vormt van onze huidige maatschappij.
Of spreekt dit argument toch niet zo vanzelf?
Want hoe vaak identificeert men nog de toegepaste wiskunde met „veel rekenen" of op zijn best met „integreren" en wekt het verbazing als men bv. hoort dat de representatietheorie van Liegroepen tegenwoordig een essentieel hulpmiddel vormt in de elementaire deeltjesfysica. Daarom lijkt het goed nog eens een greep te doen uit een aantal toepassingen. Daar zijn dan naast de meer bekende toepassingen van de (vector)analyse en statistiek in de mechanica, thermodynamica en elektriciteitstheorieen daarmee de toepassingen in vrijwel ieder ingenieurs-vak, de toepassingen van de theorie van de Hilbert-ruimten in de kwantummechanica, de differentiaalmeetkunde in de algemene relativiteitstheorie, de functietheorie in de elektronica en dan meer recent toepassingen van de theorie van de Liegroepen in de fysica, Boole-algebra in de computer-elektronica, dan de economie

met bv. optimaliseren van produktieprocessen, toepassingen in biologie, bij taalonderzoek en psychologie (er bestaat een Journal of Math. Psych.), toepassingen van getaltheorie op elektrische netwerken, regeltechniek met stabiliteit van differentiaalvergelijkingen, toepassingen van grafentheorie en morsetheorie in de kristallografie, van homologie theorie in elementaire deeltjes fysica, van statistiek in informatietheorie, . . . etc, etc. etc.

Het is hiermee duidelijk dat de betekenis van de wiskunde dus niet alleen schuilt in haar „waarde op zich", maar dat haar culturele betekenis tevens schuilt in de groeiende penetratie van wiskundige technieken in een breed gebied. Ook blijkt hieruit dat een groot aantal leerlingen later, óók in de niet natuurwetenschappelijke studierichtingen, zelf wiskundige methoden gáan toepassen en dus vertrouwd moeten raken met dit aspect van het wiskundige onderzoek.

2. Het tweede argument betreft de motivatie van de individuele leerling. Ik geloof dat de invoering van onderwerpen uit de zuivere wiskunde als logica, topologie, verzamelingenleer belangrijk is, vooral ook om de M.O.-wiskunde scherper te formuleren, maar toch zal deze zuivere wiskunde in de eerste plaats de meer abstract ingestelde leerlingen boeien. Echter juist op de leeftijd van de middelbare scholier speelt de vraag: „Wat kan je er mee doen?" een belangrijke rol en voor deze meer pragmatisch ingestelde leerlingen kan juist de toegepaste wiskunde een goede motivatie zijn ter beoefening van de wiskunde.

Hiermee samen hangt het feit dat in deze tijd waarin nieuwe interdisciplinaire vakken ontstaan, de toegepaste wiskunde een goed voorbeeld is hoe praktische problemen uit veel gebieden door middel van theoretische modellen opgelost kunnen worden. Hierdoor past de toegepaste wiskunde zichtbaar in de „trend" van deze tijd en sluit daarmee aan op de belangstellingssfeer van de middelbare scholier.

Ik heb nu hieronder een schetsmatige lijst gemaakt van een aantal onderwerpen die misschien geschikt zijn voor het M.O.

1. Het beschrijven van elektronische schakelingen in computers met behulp van Boole-algebra.

2. Het beschrijven van elektronische schakelingen in radio's, enz. met behulp van de zg. complexe schrijfwijze. Zoals bekend treedt in deze schrijfwijze een weerstand op als een reëel getal R, een zelfinductie als een imaginair getal $i\omega L$, een capaciteit als $1/i\omega C$. Met dit enorm aardige deel van toegepaste complexe-getallen-theorie kan men het stroomverloop berekenen van elektronische schakelingen en deze rekenwijze vormt dan ook een van de grondslagen van de theoretische elektronica. Hierop aansluitend kunnen verschillende

begrippen behandeld worden. Bijvoorbeeld Fourierontwikkeling van trapfuncties in sinussen.

3. Statistiek. Dit onderwerp is al zo vaak genoemd dat ik dit hier buiten beschouwing laat. Ik denk alleen nog aan toepassingen in de informatietheorie, zoals de definitie van de capaciteit van een informatiekanaal, verlies van een kanaal, ... met de talloze aardige problemen die er op dit gebied zijn.

4. Groepentheoretische toepassingen in de fysica. Ik kan mij voorstellen dat men dit onderwerp op het eerste gezicht niet geschikt acht, maar dit kan achteraf toch wel meevallen. Mogelijke onderwerpen zijn: classificatie van kristallen, invariantie van fysische wetten t.o.v. bepaalde groepen. Ik denk hier in het bijzonder aan de bewonderenswaardige Feynman lectures in physics, III chap. 1,... 6, die op onconventionele wijze, welke zeker niet het M.O. niveau te boven gaat de lezer binnen voert in de theorie van de Hilbertruimten en de toepassingen van de vector- en spinor-representaties van de rotatiegroep.

5. Inschakelen van de computer bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Ook dit lijkt een onderwerp dat niet geschikt zou zijn voor het middelbaar onderwijs. Maar het begrip differentiaalvergelijking kan uitgelegd worden zonder nader in te gaan op directe oplossingsmethoden. Ook de beschrijving van een differentiaalvergelijking door een benaderend discreet schema hoeft niet op didactische moeilijkheden te stuiten. En als men toch een programmeertaal op de middelbare school wil onderwijzen, dan kan men zelfs een eenvoudig schema op de computer laten uitrekenen.

6. Besliskunde. Ook hier zijn er talloze problemen: optimaliseren van de produktie bij een fabriek, minimaliseren van de lengten van scheepvaartroutes, enz., die geschikt zijn voor het middelbaar onderwijs.

7. Toepassing van wiskundige methoden (bv. matrixrekening) in de cartografie.

Het lijkt mij nu goed enkele bezwaren tegen een dergelijke lijst van onderwerpen aan te voeren. In de eerste plaats zal men als nadeel noemen het feit dat zodra men enkele onderwerpen van deze lijst al gaat behandelen, het gevaar bestaat van versnippering van het rooster. Dit zou voorkomen kunnen worden door ieder onderwerp in de vorm van een project te geven. Dit wil dus zeggen, dat de leerling bv. een keus kan maken uit 10 projecten, naar gelang van zijn belangstelling en aanleg. Zonder bezwaar kunnen dus ook onderwerpen op deze lijst geplaatst worden, die wat moeilijkheidsgraad boven het gemiddelde liggen. Een leerling met wiskunde aanleg zal dan een

moeilijker project kunnen (moeten) nemen. Bij ieder project wordt wat literatuur ter bestudering opgegeven en eventueel een probleem ter oplossing.

Een ander bezwaar, dat men zou kunnen aanvoeren is of niet veel van de genoemde onderwerpen niet onder bijvoorbeeld het vak natuurkunde zijn onder te brengen. Het lijkt mij van niet, daarvoor wordt in de problemen van te specificieke wiskundige methoden methoden gebruik gemaakt. Wel zouden dezen projecten opgezet kunnen worden in samenwerking tussen de wiskunde- en de natuurkunde- of bv. economieleraar.

Misschien zou het in dit verband zelfs nuttig zijn om te komen tot een werkgroep van deskundigen die een inventarisatie maken van onderwerpen uit de toegepaste wiskunde en aan de hand hiervan een didactisch aantrekkelijk leerboek samenstellen.

Hoewel later bij nader onderzoek kan blijken dat sommige genoemde onderwerpen niet geschikt zijn, lijkt het mij toch belangrijk dat de discussie over dit essentiële aspect van het wiskundeonderwijs voortgezet wordt.

COMPUTERS EN HET ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS

Onlangs is door een daartoe in het leven geroepen commissie[1]) een rapport uitgebracht aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor MAVO, HAVO en VWO.

Volgens de schrijvers daarvan is de taak van het middelbaar onderwijs in deze een grondslag te leggen voor een kennis van zaken met betrekking tot de computer. Wàt zij precies met gronslag bedoelen wordt niet geformuleerd, doch komt min of meer uit de verf bij bestudering van het rapport: de grondslag blijkt neer te komen op

a) Algoritmiek
b) Discrete wiskunde
c) Approximatief rekenen

Gezien de omvang van het gedeelte over algoritmiek, de inhoud daarvan, de volgorde waarin de drie onderdelen worden genoemd

---

[1]) Bedoelde commissie was samengesteld uit de hoogleraren Prof. de Bruijn, Prof. Euwe, Prof. Seidel, Prof. van der Sluis en Prof. van Spiegel. Het bedoelde rapport is gedateerd in april 1968 en aan alle scholen toegezonden.

en de aanbeveling in punt 5.2 van het rapport om met een leerboek algoritmiek te beginnen mag worden aangenomen dat in de ogen van de commissie algoritmiek het allerbelangrijkste onderdeel is.

Schrijvers dezes zijn de mening toegedaan dat hoewel algoritmiek geen onnodig en/of nutteloos onderdeel is, het erg gemakkelijk ontaardt in een programmeercursus, of — nog liever — niets anders is dan een uiteraard elementaire programmeercursus. Het lijkt ons enigszins beperkt om dit als hoofdmoot van computer(wis)kundeonderwijs te zien. Er zijn betere programmeercursussen mogelijk bij de daarin gespecialiseerde beroepsopleidingen, terwijl het middelbaar onderwijs, met name het VWO, allesbehalve een beroepsopleiding is.

Opmerkelijk is verder dat het rapport zich beperkt tot computer-*wis*kunde. Immers, dit is slechts een onderdeel van het veelomvattender computerkunde, onder welke vlag door schrijvers dezes aan hun respectievelijke scholen experimenteel enkele lessen worden gegeven. Computerkunde bevat — populair doch enigszins vaag gezegd — alles wat met computers te maken heeft. Dit kan nader gepreciseerd worden door enerzijds een overzicht van de structuur, opbouw en werking van de computer, anderzijds een inleiding tot de gebruiksmogelijkheden ervan. Algoritmiek is in wezen een onderdeel van dit laatste.

Het is niet onze bedoeling om in het kader van dit stukje dieper op de inhoud van het overigens nog te creëren vak computerkunde in te gaan, maar vooral om in dit vroege stadium de mening te uiten dat een ruimer gebied van het vak een betere grondslag zou kunnen leggen bij de toekomstige avo-abituriënten dan alleen het beperkte, sterk op de praktijk gerichte, onderdeel dat in het genoemde rapport wordt aanbevolen.

De ervaring van ondergetekenden is trouwens, dat bij de leerlingen de belangstelling in eerste instantie gericht is op de werking van computers. Interesse voor wat er mee gedaan kan worden, en vooral hóe het gedaan moet worden (de algoritmiek) wordt pas gewekt als inzicht in de werking is verkregen. Bovendien is de algoritmiek dan meer plausibel geworden.

Als knuppel in het hoenderhok is dit, naar wij hopen, voldoende om reacties aan belangstellenden te ontlokken. Moge ook het avo zelve zijn duit in het computerkundezakje doen!

J. G. A. Haubrich, Sint-Jorislyceum, Eindhoven
G. A. Vonk, Scholengem. „De Populier". Den Haag

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

Voor deelname aan de leesportefeuille waarin onderstaande tijdschriften zijn opgenomen wende men zich tot G. A. J. Boost, Parklaan 107A, Roosendaal (N.Br).

1. *Praxis der Mathematik* (X, 1–6; januari–juni 1968).

Th. Lambacher, Eine Zahlenfolge und antike geometrische Probleme;
Kl. Wigand, Mathematik in unserer Welt;
J. E. Hofmann, 12. Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach;
H. Töpfer, Propädeutik des Matrizenrechnens in Sexta.
H. Zeitler, Zur Volummaszfunktion des Tetraeders;
E. O. Busolt, Ein Irrationalitätsbeweis modulo g;
L. Kienle, Der Gröszenkalkül in der Geometrie;
J. E. Hofmann, Aus dem Briefwechsel Euler-Goldbach;
H. Töpfer, Modernisierung des Mathematikunterrichts auf halbem Wege;
H. Dücker, Der Pascal-Satz nichteuklidisch.

E. M. Bruins, Das Problem des Spiegeldreiecks;
V. Brox, Hyperbelkonstruktion-einmal anders;
Kl. Wigand, VIII. Internationale Mathematikolympiade in Sofia;
H. Töpfer, Einführung der Matrizen im Gymnasialunterricht.

K. D. Schmidt, Affine und messende Geometrie;
O. Botsch, Ein einfaches Boole-Modell für Sexta;
K.-A. Keil, Wiederholungsprogramme;
—, Lehrprogramme in Bayern.

W. Hartkopff, Heuristik im mathematischen Unterricht;
Kl. Kursawe, Über die Stetigkeit von Darstellungen reeller Zahlen;
I. Paasche, Kanonische Primzerfällung der Fakultät.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLVI–XLVII; december 1967–april 1968).

J. Bouteloup, Bijections et substitutions;
Badrikian e.a., L'enseignement du calcul des probabilités;
Beamurguia, Sur une erreur faite par les élèves;
J.-M. Chevalier, Matériaux pour un dictionnaire;
E. Dehame, Les entiers Z en sixième;
A. Adler, Les olympiades mathématiques 1967;
Concours général 1967; rapport sur les concours 1965 et 1966;
Le colloque d'Utrecht.

G. Walusinski,, . . . par la communication d'aultry;
M. Glaymann, Introduction à la logique;
A. Buquet, A propos des points rationels des cubiques;
J. Chevalier, Matériaux pour un dictionnaire;
P. Kree, Comment établir des programmes de mathématiques?
D. Duclos, Le groupe à l'école primaire.

G. Walusinski, „Faites ce que je dis, ne faites pas ce que je fais";
L. Schwartz, Le modèle d'une théorie des ensembles;
G.-H. Clopeau, La technologie et les mathématiques;
J. Chevalier, Matériaux pour un dictionnaire;
M.-A. Touyarot, Variations sur le thème des applications linéaires;
A. Gouret, Pour la formation continue;
W. Mountebank, Carnet de lecture.

3. *Mathematica & Peadagogia* (nr. 31 en nr. 32; 1967–1968).

M. Barbut, De Pascal à Savage, un chapitre de l'algèbre linéaire;
G. Pickert, Formes bilinéaires;
R. Broeckx, Beschouwingen over eindige getallenrijen;
Papy, Propos sur l'usage du film dans l'enseignement de la mathématique moderne;
C. Aerts, De samenstelling van relaties;
E. Bouqué, Axioma van Pasch en halfvlak.

Papy et P. van Praag, Champs algébriquement clos;
C. de Munter, De vierkantsworteltrekking;
R. Broeckx, Rond de driehoek van Pascal;
E. Bouqué, Een experiment vormleer in de lagere school;
W. Servais, Préparation à l'analyse analytique dans l'enseignement de 12 à 15 ans;
G. Bosteels, Verzamelingsleer;
W. Servais, Introduction de l'intégrale dans l'enseignement secondaire.

4. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*; (Neue Folge. XIII, 2; XIV, 1; XV, 1; 1966–1968).

H. Zassenhaus, Experimentelle Mathematik in Forschung und Unterricht;
Fr. Hohenberg, Vom Bildungswert der Geometrie;
A. Delessert, Gibt es Darstellungen der euklidischen Geometrie die sich wesentlich voneinander unterscheiden?
G. Fillbrunn, Über einen Büschelsatz der analytischen Geometrie;
H. G. Steiner, Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms für die Theorie der reellen Zahlen;
H. Heyer, Drei Wege zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung;
K. Kiesswetter, Ein einfaches Beispiel für eine Funktion welche überall stetig und nicht differenzierbar ist.

A. Oberschelp, Mengen, Relationen, Funktionen;
R. Lingenberg, Absolute Geometrie der Ebene;
J. Aczél, Funktionskomposition, vertauschbare Funktionen und Iterationsgruppen vom geometrischen Standpunkt aus;
H. Zeitler, Zwei Modelle der hyperbolischen Geometrie und ihr Zusammenhang;
Kl. Kopfermann, Duale Basis und dualer Verktorraum;
H. Behnke, Zu den Reformplänen des Studiums.

H. Behnke, R. Courant 80 Jahre;
H. Behnke, Das Studium der Lehramtskandidaten der Mathematik an den unruhigen Universitäten unserer Tage;
K. B. Grundlach, Kenntnisse der Abiturienten und Studienerfolg in den Anfängervorlesungen im Fach Mathematik;

G. Pickert, Das Bruchrechnen als Operieren mit Abbildungen;
H. Griesel, Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnungs;
W. Bos, Hermitesche Formen als Skalarprodukte komplexer Vektorräume;
L. Baumgartner, Zerlegung des vierdimensionalen Raumes in kongruente Fünfzelle;
L. Danzer, Zerlegbarkeit endlich dimensionaler Räume in kongruente Simplices;
J. Rätz, Über Inhalt und Oberfläche von Kugel und Zylinder;
A. Kirsch, Läszt sich eine ,,gerechte'' Rangordnung durch eine Punktbewertung erzeugen?
H. J. Vollrath, Grundgedanken der Omega-Analysis und ihrer Anwendung auf die Bestimmung reeller Grenzwerte.

5. *Elemente der Mathematik* (XXII, 5–6 en XXIII, 1–4; September 1967–Juni 1968)

H. G. Steiner, Körper in denen —1 nicht Quadratelement ist;
R. Z. Domiaty, Eine Bemerkung über stabile Polynome;
R. P. Boas, Note on integration by residues;
O. Baier, Zur Rytzschen Achsenkonstruktion;
M. Goldberg, Packing of 19 equal circles on a sphere;
M. Goldberg, An improved packing of 33 equal circles on a sphere.

B. Abel de Valcourt, Axially symmetric polygons inscribed in and circumscribed about convex sets;
H. Vogler, Bestimmung einer oberen Schranke fur den Inhalt des Parallelrisses eines regelmässigen Körpers;
J. Berkes, Einfacher Beweis und Verallgemeinung einer Dreiecksungleichung.
M. Jeger, Der Aufbau der Kongruenzgruppe in Raum durch Spiegelungen;
P. Erdös und E. G. Strauss, Über eine geometrische Frage von Fejes-Tótl;
J. Binz und P. Wilker, Ein mathematischer Problemwettbewerb im Kanton Bern.

P. Hafner, Automorphismen von binären quadratischen Formen;
W. Sierpinski, Un théorème sur les nombers triangulaires;
M. Jeger, Der Aufbau der Kongruenzgruppe durch Spiegelungen (Fortsetzung);
J. E. Hofmann, 12. Mathematikgeschichtliches Kolloquium im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach.

K. Kopfermann, Über Dreiecke;
M. W. Richter und J. Spilker, Überall maximale Funktionen;
E. Schöder, Eigenschaften gewisser Scheitelkreise einer Ellipse bezüglich ihrer Brennpunkte.

P. Läuchli, Tangram, ein Puzzle-problem für den Computer;
B. Karst, The congruence $2^{p-1} \equiv 1$ (mod. p^2) and quadratic forms with high density of primes;
W. A. Fellmann, Bericht über das 11. internationale Kolloquium in Oberwolfach.

6. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XX, 6–9; XXI, 1–6; September 1967–Juni 1968)

E. Boerma, Michael Faraday;
E. Ehrhart, Eigebiete und Eikörper;
D. Wode, Affine und projektive desarguesche Geometrien und ihre Koordinatisierungen.

W. Ness, Anwendung des Satzes vom arithmetischen und geometrischen Mittel auf Extremalaufgaben;
R. Müller, Eine Einführung in den Strukturbegriff;
W. Scholz, Die Irrationalität von π;
H. Schubart, Eine elementar beweisbare isoperimetrische Ungleichung;
W. Zirkel, Die Ringstruktur der Mengen- und Schaltalgebra im Unterricht;
W. Griesing, Moderne Mathematik und Rechenunterricht.

R. Stender, Die älteste deutsche Mathematik-Methodik.

G. Janicke, Digitaler Demonstrationsrechner mit programmierter Instruktion;
I. Weidig, Einführung in die Bruchrechnung mit Hilfe von Verknüpfungstafeln;
H. Glashoff, Zur Eulerschen Geraden mit der korrespondierenden Geraden der dreiseitigen Pyramide.

H. Krickeberg, Markoffsche Ketten;
R. Stübe, Die Herleitung der starken Syllogismen mit Hilfe von Venn-Diagrammen;
W. Böttcher, Die Konstruktion des Bildpunktes bei linearen Abbildungen.

Th. Ziegler, Boolesche Maschinen im Unterricht.
G. Holland, Zur axiomatischen Begründung des zweidimensionalen Vektorraumes;
E. Baumann, Lage des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an den Gymnasien.

O. Botsch, Zweireihige stochastische Matrizen;
H. Kühl, Der Mathematikunterricht in zwölf Ländern;
E. Merkel, Boolesche Maschinen;
O. Schmidt, Die Anzahl der Beklammerungsmöglichkeiten in einem Produkt aus n Faktoren;
H. Heise, Zur Situation der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer in den Berliner Schulen und Hochschulen.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

210. Gegeven is een driehoek ABC. Er wordt gevraagd deze door middel van vier lijnstukken in vier delen te verdelen zo, dat uit deze vier delen een vierkant kan worden gevormd.

M.i. is het vraagstuk erg moeilijk. Degenen, die er geen raad mee weten, kunnen hieronder de beschrijving van de verdeling vinden. Het is dan nog een aardige sport te bewijzen, dat de vier stukken inderdaad tot een vierkant samengevoegd kunnen worden.

p is het midden van BC, Q het midden van AC. Kies op AB een punt R zo, dat PR gelijk is aan de zijde van het gevraagde vierkant. Kies S op RB zo, dat $RS = \frac{1}{2}AB$. Laat uit S een loodlijnstuk ST en uit Q een loodlijnstuk QU op PR neer. De zo verkregen vier delen voldoen aan de vraag.

211. Als men het getal

$$3913043478260869565217$$

door 3 deelt, krijgt men

$$1304347826086956521739.$$

Men krijgt het tweede getal ook door de voorste twee cijfers van het eerste getal achteraan te plaatsen. Wat is het kleinste getal, dat deze eigenschap heeft?

(B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

208. Een stapel kaarten wordt opnieuw gerangschikt. Men legt de bovenste kaart op tafel, de tweede daarop, de derde onderaan, de vierde weer bovenop, de vijfde onderaan, enz. Men herhaalt deze bewerking nog eenmaal. Het blijkt dan, dat de kaart, die aanvankelijk de 395e van boven was, nu de 394e van boven geworden is. Hoeveel kaarten bevat de stapel?

De hernieuwde rangschikking is een toevoeging van nieuwe aan oude rangnummers. Neem aan, dat het aantal kaarten $2n$ of $2n + 1$ bedraagt. De toevoeging is dan

$$
\begin{aligned}
1 &\to n + 1 \\
2 &\to n + 1 - 1 \\
3 &\to n + 1 + 1 \\
&\dots \\
2k &\to n + 1 - k \\
2k + 1 &\to n + 1 + k \\
&\dots \\
2n &\to 1 \\
2n + 1 &\to 2n + 1 \quad \text{(als er } 2n + 1 \text{ kaarten zijn).}
\end{aligned}
$$

In ons geval is $k = 197$ en

$$395 \to n + 1 + 197.$$

Als n even is, dan is bij de tweede rangschikking

$$n + 1 + 197 \to n + 1 - \tfrac{1}{2}(n + 1 + 197)$$

en als n oneven is

$$n + 1 + 197 \to n + 1 + \tfrac{1}{2}(n - 197).$$

Dus moet

$$n + 1 - \tfrac{1}{2}(n + 1 + 197) = 394 \text{ en } n \text{ even}$$

of

$$n + 1 + \tfrac{1}{2}(n - 197) = 394 \text{ en } n \text{ oneven}.$$

In het laatste geval vinden we voor n een gebroken getal. In het eerste geval vinden we $n = 984$. Zodat we voor het aantal kaarten vinden 1968 of 1969. Zodat de heer Kootstra de lezers ditmaal niet alleen een goed 1969 wenste, maar ook een goede oudejaarsavond.

209. Voor de opgave zie het vorige nummer.

a. Kies $t_1 = 7$, $t_2 = 9$. Er komt dan

$$7, 9, 6, 3, 5, 4, 1, 8, 1, 5, 2, 0, \dots$$

b. Als in de rij een 0 voorkomt geflankeerd door twee getallen ongelijk 0, dan zullen later twee nullen naast elkaar voorkomen Als bijv. voorkomt . . . 3, 6, 0, 4, 7, . . ., dan komt later voor . . . 1, 8, 0, 0, 2, 8, ...

Komen naast elkaar precies n nullen voor, dan zullen later minstens $n + 1$ nullen naast elkaar voorkomen. Repeteren is dus uitgesloten.